Introduction générale

Importance des énoncés des problèmes pour comprendre les notions mathématiques abstraites, pour accéder à une sémantique mathématique.

A l'analyse des résultats des élèves aux évaluations, il apparait que la résolution de problèmes constitue encore une fragilité. Or, elle s'articule complètement aux situations et progressions de calcul mental (fournies en début d'année) dans la mesure où les situations à résoudre prennent appui sur la construction et la compréhension de la numération (sens des nombres, des opérations…) et doit être proposée quotidiennement en classe soit au travers de problèmes courts, de problèmes à étapes et de problèmes ouverts.

Le texte ci-après donne quelques références à la fois théoriques mais également pour des choix pédagogiques en classe.

Il y a un enjeu à porter institutionnellement l'importance de faire des problèmes en classe.

La compétence à résoudre des problèmes est souvent citée comme l'une des compétences clés du 21° siècle. Elle est liée à la confiance en soi qui se travaille également avec la fréquence d'exposition aux problèmes à résoudre et l'expérience de la réussite.

Les processus de résolution de problèmes devraient être la source et le support principal de l'apprentissage des mathématiques pendant tout le primaire. Les situations proposées permettent de faire le lien entre le monde qui entoure les élèves et les mathématiques.

La résolution de problèmes est associée dans le secondaire à la démarche d'investigation, au concept de tâches complexes ou encore au travail de groupe mais au primaire, elle s'associe au domaine du raisonnement, des choix stratégiques appliqués aux techniques opératoires et aux situations mobilisant des fondamentaux.

La résolution de problèmes reste un moyen privilégié pour l'application de nouveaux savoirs enseignés et un moyen privilégié pour donner du sens aux connaissances enseignées.

Les stratégies en jeu dans la résolution de problèmes sont :

- comprendre le problème : relire, reformuler, repérer l'information donnée et l'information nécessaire

- élaborer un plan : comparer avec des expériences antérieures, étudier des stratégies possibles, choisir une stratégie parmi un répertoire constitué

- mettre le plan en œuvre : appliquer la stratégie choisie, faire les calculs nécessaires, s'assurer de l'exactitude des résultats

- vérifier des résultats : vérifier le caractère raisonnable de la réponse,

- réajuster si besoin, opérer des rétroactions.

- aller au-delà d'une collecte directe d'informations

- se montrer ouvert à la nouveauté

- comprendre un problème c'est en construire une représentation et cette compréhension peut s'effectuer par « particularisation d'un schéma » et c'est bien souvent la sémantique et la structure du problème déterminent pour une large part les performances et stratégies des élèves.

- la présentation des énoncés peut aussi jouer un rôle dans la réussite ou l'échec de l'engagement dans la tâche et la résolution.

- la place de la question s'avère parfois déterminante. L'énoncé apporte une information organisatrice permettant d'activer le schéma adéquat, l'intégration des données qui suivent la question et et le calcul en cours de lecture de l'énoncé. En l'absence de mémoire à long terme, les sujets sont obligés de construire en mémoire de travail « une représentation ad hoc de la situation problème dite modèle de situation.

L'enjeu est alors de présenter aux élèves une diversité de situations afin qu'ils puissent exercer des schèmes existants, tout en cherchant à faciliter l'identification du but à atteindre, de la catégorie de problèmes ou de l'information à sélectionner et cela dès la grande section. (Priolet 2014)

On sait également que la résolution de problèmes est une affaire de stratégie à l'économie.

Il est important de contextualiser les apprentissages puis d'accompagner la dé-contextualisation et la re-contextualisation ainsi les élèves construisent des connaissances pragmatiques en manipulant les mathématiques au travers de situations de la vie quotidienne qui se combinent à des processus d'interprétation sémantique.

Les performances des élèves s'améliorent dès lors que les séances sont réellement orientées vers la résolution effective de problèmes, respectant un certain dispositif pédagogique et didactique caractérisé par la recherche de solution à des situations problèmes, la mise en réseau de connaissances, la conversion des représentations : registres textuels, numériques, iconique et la catégorisation des situations problèmes afin de construire un ensemble de « schémas référents »

Des recommandations

- éventuellement conduire un travail sur le lexique des mathématiques en amont

- analyser pour comprendre la consigne

- communiquer

- synthétiser : consignation des acquisitions conceptuelles et procédurales

- institutionnalisation des savoirs

<u>Des démarches</u>

- Mobiliser une base de connaissances spécifiques, accessibles et organisées de façon cohérente et flexible qui doivent intégrer des faits mathématiques, des symboles, des algorithmes, des concepts et des règles et des exemples de résolutions ;

- développer des stratégies de recherche en situation de problèmes

- savoir observer, savoir être attentif, savoir gérer ses émotions, mobiliser des connaissances mémorisées

- développer des stratégies d'auto-régulation (détermination du but, la planification, le contrôle et l'ajustement)

- mettre à l'épreuve ses propres représentations sociales des mathématiques

- développer et exercer les élèves à des stratégies telles que :

→ lecture-compréhension/ le maitre lit plusieurs fois et les élèves écoutent, plus prélèvent des informations, les mettent en lien avec le support écrit, reformuler, paraphraser si nécessaire.

→ reconnaître la structure du problème, passer éventuellement par des décompositions de sous problèmes (dans le cas des problèmes à étapes). Le but est de reconnaître parmi plusieurs propositions le schéma type/ la catégorisation du problème ou de réaliser la représentation type du problème (cela passe en amont par la réalisation de plusieurs modélisations de problèmes).

→ Compléter la structure et mettre en équation : compléter la structure c'est indiquer explicitement ce que l'on sait, de que l'on recherche et les liens entre ce qui est connu et inconnu. Compléter un schéma c'est montrer que dans une structure que l'on perçoit, on sait agencer les éléments pour qu'ils prennent sens. L'équation établie nous amène alors immédiatement vers une stratégie de résolution qui a pour objectif d'être automatisées.

→ Résoudre cette équation

→ exprimer le résultat la réponse

→ expliciter sa démarche

MAIS AUSSI

- catégoriser ponctuellement des problèmes et ancrer en mémoire les caractéristiques des catégories de problèmes

- modéliser représenter ponctuellement des situations en respectant la grammaire, modéliser pour structurer, structurer pour expliciter

- développer ses compétences en calcul mental

- développer ses compétences en calculs posés pour automatiser toutes les techniques en lien le calcul en ligne et le calcul mental

- aborder en parallèle et non séquentiellement les 4 opérations pour construire le nombre sous différents aspects

- travailler la décomposition des nombres.

L'enjeu des cahiers de références

Les processus mobilisés dans l'activité de résolution de problèmes.

Les difficultés des élèves en résolution de problèmes tiennent à la complexité et à l'inter-activité des compétences qu'ils doivent mettre en œuvre.

→ évoquer (invoquer) des actions et procédures associées à la situation problème : soit l'élève associe le problème à d'autres connus, à une procédure connue, soit il construit « un espace problème » qui engendre un espace recherche à partir duquel sont tentés des essais de solution » (Richard)

→ Pour Brissiaud, l'apprentissage de la résolution de problèmes peut se faire à partir d'exemples mobilisés en contexte (problèmes types).

→ des incontournables :

- enrichir la mémoire des élèves sur les problèmes :

0/ vers les élèves : donner des occasions aux élèves de résoudre des problèmes et de les réussir seuls

0/ clarifier les types de problèmes dont on attend qu'ils soient résolus « automatiquement » par les élèves : les problèmes basiques ;

- donner des problèmes arithmétiques liés à une seule opération sans information superflue, avec une syntaxe simple « one step problems »

- proposer des problèmes verbalement « Les problèmes arithmétiques verbaux ou à énoncés verbaux racontent des histoires. Ils sont donnés avec des mots et font intervenir peu de symbolisme mathématique. En anglais on utilise les expressions « word problems » ou « story problems ».

- permettre l'invention de procédures

Se doter de répertoires et structurer une progressivité des situations proposées.

PROBLEMES ARITHMETIQUES DE REINVESTISSEMENT :

UNE SYNTHESE, DES PISTES

Conférence Paper Mai 2016

Catherine HOUDEMENT Enseignant-Chercheur ; Université de ROUEN.

Cette synthèse sur les problèmes arithmétiques associe des regards de psychologie des apprentissages et de didactique. On s'intéresse **aux problèmes numériques de la classe** en insistant sur **la réussite aux « problèmes élémentaires** » vus comme briques élémentaires de raisonnement.

Elle propose de revisiter les problèmes arithmétiques en les classant en 3 types de problèmes **: problèmes élémentaires, problèmes complexes et problèmes atypiques**

I ./ Origine du questionnement

- Contestations de certaines tâches telles que ***« souligner les informations utiles , barrer celles qui sont inutiles, trouver la question, … » . En fait , on aurait besoin de « tout le texte du problème »*** pour le résoudre.

On estimait qu'il y aurait une compétence générale qui rendrait le sujet capable de réussir n'importe quel problème. Cette représentation aurait tendance à perdurer. Leur hypothèse sur le fait que ces erreurs perdurent : Manque d'assurance. Changement progressif de cap sur les problèmes , flou institutionnel, ...

Question importante: **Que savons-nous du comment on réussit à résoudre un problème ?**

Eclairage des travaux en psychologie cognitive (Jean JULO).

II./ Point de vue de la psychologie cognitive

1/ Des exemples pour réfléchir

- 4 exemples d'énoncé de « ***problèmes élémentaires ».*** On essaie de se remémorer comment on a procédé. En général, on a « à peine réfléchi et instantanément, on a eu l'idée de l'opération qui donne la réponse.

- 1 exemple de problème « a-typique » ou « complexe »

2/ Les explications de Jean JULO

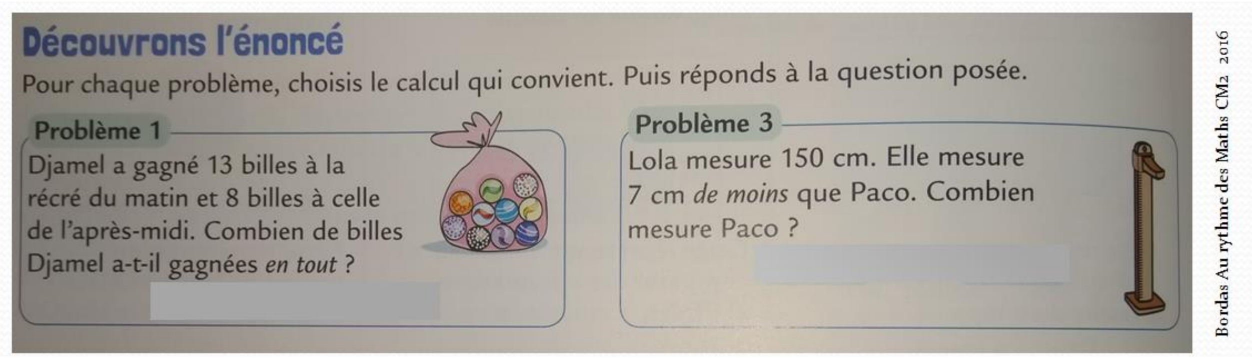
La résolution de problèmes

La résolution de problèmes : point des recherches, ce qu'en disent les chercheurs

Les stratégies en jeu dans la résolution de problèmes

Introduction

On observe, y-compris dans certains manuels, la prévalence d'énoncés de ce type :



Ce type d'exercice permet de catégoriser les problèmes. Toutefois, il comporte de nombreuses limites. Ainsi :

- Il ne permet pas d'exercer d'activité de reconnaissance, de tri de données.
- Il est lié à une notion en cours d'étude. Le questionnement est fermé. L'activité de catégorisation est basique.
- Les problèmes sont peu ou pas rattachés à la vie courante.
- On ne laisse pas ou peu le droit à l'erreur…

Ce type d'activité est un maillon. Certes nécessaire, elle se limite à un exercice systématique et l'on ne peut se satisfaire de son caractère partiel.

En réalité, les problèmes de mathématiques se classent en trois grandes familles :

- Problèmes simples pour apprendre à catégoriser. Ce sont des problèmes fermés qui rattachent l'énoncé à une typologie, et impliquent de ce fait le travail de catégorisation. Un exemple est développé ci-après avec les problèmes impliquant l'opération « soustraction » (parmi lesquels l'addition lacunaire, aussi appelée « à trous ») ;
- Problèmes à étapes impliquant plusieurs opérations ;
- Véritables problèmes pour chercher qui privilégient la démarche aux calculs.

Qu'est-ce qu'un problème simple pour apprendre à catégoriser ?

On parle ici de problèmes fermés, qui ne contiennent pas d'étape intermédiaire.
La catégorisation est un préalable aux problèmes ouverts et aux problèmes pour chercher. Cette étape, nécessaire, n'est pas pour autant suffisante : c'est ce travail de catégorisation qui sera *in fine* réinvesti dans une démarche heuristique (Voir plus loin).

Catégoriser, c'est inférer des structures connues. L'un des outils de catégorisation les plus connus est la typologie de Gérard Vergnaud. On le retrouve sous plusieurs formes condensées ; voici un exemple de document en ligne (IEN Lille3) :
http://ien-lille3-villeneuvedascqsud.etab.ac-lille.fr/files/2019/01/typologie_pb_additifs.pdf (IEN Lille 3)
http://www.ac-grenoble.fr/ien.haut-gresivaudan/IMG/pdf/Typologie_des_problemes_additifs_et_multiplicatifs_cycle_2.pdf (IEN Grenoble)
La typologie de Vergnaud rassemble 7 familles de problèmes additifs et soustractifs, 2 familles de problèmes multiplicatifs et 2 familles de problèmes relatifs à la division. Cela dit, la richesse des situations proposées vient enrichir ces classements.

Il appert que la catégorisation des problèmes est le résultat d'une fréquentation assidue de différents modèles énoncés, qui ne sont pas toujours explicites pour le praticien.
Voici un exemple à suivre avec la typologie des problèmes aboutissant à l'opération soustraction (ou addition lacunaire « à trou »), qui correspond à quatre situations bien distinctes, selon que l'on recherche :

- Un reste : transformation d'un état : un état initial subit une transformation pour aboutir à un état final ; recherche de l'état final.
  Voir cette vidéo[1] : https://www.reseau-canope.fr/lesfondamentaux/discipline/mathematiques/operations/le-sens-de-la-soustraction/combien-reste-t-il.html
- Un manque : composition de deux états : recherche d'une partie d'un tout.
  Voir cette vidéo : https://www.reseau-canope.fr/lesfondamentaux/discipline/mathematiques/operations/le-sens-de-la-soustraction/combien-manque-t-il.html
- Combien de plus / combien de moins : Comparaison d'état, recherche de la comparaison (combien de plus/de moins).
  Voir cette vidéo : https://www.reseau-canope.fr/lesfondamentaux/discipline/mathematiques/operations/le-sens-de-la-soustraction/combien-de-plus-combien-de-moins.html
- Combien a été ajouté ou retiré : transformation d'un état, un état initial subit une transformation pour aboutir à un état final ; recherche de la transformation d'un état connaissant les états initial et final.
  Voir cette vidéo (ajout) : https://www.reseau-canope.fr/lesfondamentaux/discipline/mathematiques/operations/le-sens-de-la-soustraction/combien-a-ete-ajoute.html
  Voir cette vidéo (retrait) : https://www.reseau-canope.fr/lesfondamentaux/discipline/mathematiques/operations/le-sens-de-la-soustraction/combien-a-ete-retire.html
- Combien y avait-il au début ? l'état final est connu et la transformation est une quantité ajoutée connue.
  Voir cette vidéo : https://www.reseau-canope.fr/lesfondamentaux/discipline/mathematiques/operations/le-sens-de-la-soustraction/combien-y-avait-il-au-debut.html

Définition

[1] Source Eduscol. Vidéos en ligne ici : https://primabord.eduscol.education.fr/le-sens-de-la-soustraction-avec-les-fondamentaux

Exemples de problèmes simples à catégoriser

Qu'est-ce qu'un problème à étapes ?

Définition
Ces problèmes peuvent être plus ou moins guidés par des questions intermédiaires.

Exemples de problèmes à étapes

Qu'est-ce qu'un problème pour chercher ? [2]

Quand la typologie des problèmes a été abordée, il devient possible de la réinvestir pour apprendre aux élèves à chercher (voir, à ce propos, la procédure heuristique).

Définition
Les élèves doivent pouvoir s'approprier facilement la situation et se représenter la tâche pour s'y engager avec leurs connaissances antérieures. La difficulté doit se situer non dans la compréhension de la situation, mais dans les moyens de répondre à la question posée. Penser à varier la présentation.
Le problème doit être « consistant », c'est-à-dire présenter une certaine « résistance ». Il ne doit pas donner lieu à une réponse qui résulte d'un traitement immédiatement reconnu.
Donner un problème de recherche, c'est lancer un défi. Il est important que les élèves « fassent leur » le problème et qu'ils aient envie de relever le défi. De ce point de vue, l'attitude du maître est aussi décisive que le choix du problème.
La validation de la solution doit être le plus possible à la charge des élèves, ils doivent pouvoir se rendre compte par eux-mêmes du bien-fondé ou non de leur réponse.

Une procédure heuristique [3]
Cette démarche défend une découverte par construction basée sur la résolution de problèmes (recherche et découverte).
On distingue les niveaux opératoires, tactiques et stratégiques. Le premier regroupe des savoir-faire élémentaires, le dernier est le plus intuitif et le plus difficile. Mais l'expérience rend les niveaux inférieurs de plus en plus riches et efficaces.
selon les cas, devant un problème :
c'est un problème connu (ou un cas particulier).
Ce premier cas se produit d'autant plus souvent qu'on a plus d'expérience.
c'est un problème qu'on peut ramener à une combinaison de problèmes plus simples.
Ce second cas correspond à une analyse.
c'est un problème ressemblant à un problème qu'on sait traiter.
Ce troisième cas est le plus intuitif, fertile mais incertain, car les problèmes analogues ont souvent, mais pas toujours, des solutions analogues.
Si le résultat n'est pas bon, on remet en cause la démarche.
Si le résultat est correct, il est bon de voir si on peut faire mieux, plus efficace ou plus général, afin d'enrichir son expérience.

Exemples de problèmes pour chercher

[2] Source ancien document d'accompagnement MEN 2002
[3] Voir à ce propos les travaux de George Pólya (1887-1985).

Bases de données de problèmes pour chercher :
IREM Réunion (avec embryon de démarche) http://irem.univ-reunion.fr/spip.php?article581 (cycle 2)
D Pernoux : http://dpernoux.free.fr/ouvertsc2.doc (cycle 2)
Académie de Lyon http://www2.ac-lyon.fr/etab/ien/rhone/villeurbanne1/spip.php?article252 (cycle 2)
IREM de Lyon http://math.univ-lyon1.fr/irem/spip.php?rubrique141 (cycle 3)
Collection de sites https://www.charivarialecole.fr/archives/511 (cycle 3)

- les problèmes ouverts (R Charnay) c'est un énoncé court qui n'induit ni la méthode, ni la solution qui reste dans le domaine conceptuel connu de l'élève et lui permet de développer des compétences plus méthodologiques ;

- Les situations problèmes qui permettent d'engager les élèves dans la construction de nouvelles connaissances

- les problèmes de ré investissement pour utiliser des connaissances déjà étudiées

- des problèmes d'intégration destinés à permettre aux élèves l'extension du champ d'utilisation d'une notion déjà étudiée

- les problèmes de synthèse où les élèves doivent utiliser conjointement plusieurs catégories de connaissances

- les problèmes permettant de faire le point sur les connaissances maitrisées

- des problèmes qui nécessitent une modélisation, une démarche heuristique.

Dresser un répertoire :

De problèmes additifs, soustractifs, multiplicatifs, divisifs. Ces problèmes sont eux-mêmes classés selon l'algorithme en jeu (cf classification de Vergnaud fournie en annexe), par exemple pour les problèmes divisif : problèmes de regroupements, problèmes de partages….

Des problèmes à étapes et des problèmes courts, des problèmes ouverts.

Des dispositifs, des supports, des manuels….

Maths en vie : quelques mots et références

ROMA : quelques mots et références

ERMEL

Les fichiers ROUSSEAU

M@ths en-vie : un outil au service de la résolution de problèmes

Proposé par Carole CORTAY et Christophe GILGER de l'Académie de Grenobles, M@ths en-vie est un dispositif pluridisciplinaire (mathématiques et français avec l'utilisation d'outils numériques).
Il a pour objectifs :

- d'ancrer les mathématiques au réel ;
- d'améliorer la compréhension en résolution de problèmes ;
- de développer la perception des élèves sur les objets mathématiques qui les entourent.

L'enjeu est d'exercer les élèves à repérer des éléments mathématiques dans des situations réelles prises en photo afin de créer un répertoire de représentations transférables dans d'autres situations.

L'utilisation de la photo ou de la vidéo offre ainsi une première représentation de la situation. Cela permet de construire ce temps intermédiaire entre une situation vécue, réelle et une abstraction complète. L'élève pourra alors engager un questionnement l'amenant à rentrer dans la situation et dans une réflexion mathématique pour résoudre son problème. Et construire le cheminement intellectuel d'une situation.

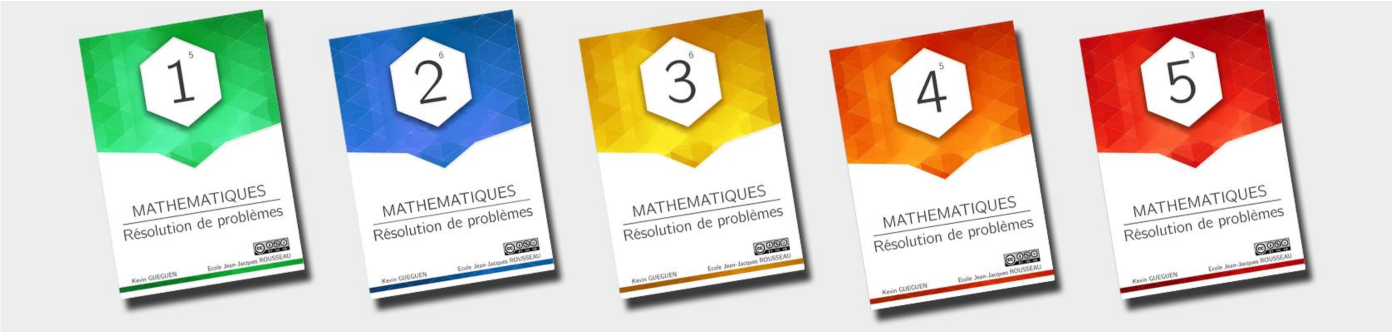
L'ensemble des domaines mathématiques peut être ainsi abordé en lien avec la progression de l'enseignant :

- **Espace et géométrie :** observer des photos et en extraire des éléments géométriques (formes, volumes, parallèles, angles droits...) pour les classer, les catégoriser.
- **Nombres et calculs :** en prenant appui sur une sortie mathématique au sein de l'école ou dans le quartier proche, les élèves prennent conscience de l'importance des nombres dans la vie quotidienne (commerce, panneau de signalisation, affiches...). Ils peuvent alors créer des énoncés de problèmes et résoudre des problèmes en lien avec une classe partenaire.

- **Grandeurs et mesures :** le travail commence d'abord sur les grandeurs notamment la notion d'ordre de grandeur. Les classes peuvent par exemple se lancer des défis : trouver un ordre de grandeur, associer une unité de mesure à un nombre brut pris d'une photo...

Liens utiles :

- Présentation vidéo du dispositif : http://www.ac-grenoble.fr/ien.st-gervais/mathsenvie/IMG/mp4/videog.mp4
- Le site M@ths en-vie : http://www.ac-grenoble.fr/ien.st-gervais/mathsenvie/?lang=fr
- Une banque de photos : http://www.ac-grenoble.fr/ien.st-gervais/mathsenvie/spip.php?rubrique7
- Des exemples dans des écoles : http://www.ac-grenoble.fr/ien.st-gervais/mathsenvie/spip.php?rubrique15



Les fichiers de l'école Jean-Jacques Rousseau

Ces documents de Kevin Gueguen sont un travail de synthèse, d'analyse et de méthodologie sur la résolution des problèmes du CP au CM2. Tels qu'ils ont été conçus, ces fichiers sont au nombre de cinq mais ne sont pas rattachés à un niveau de classe.

Ils ont pour but de proposer :

- une schématisation/modélisation explicite des situations mathématiques rencontrées ;
- une démarche de découverte et d'approfondissement progressive et spiralaire des différentes catégories de problèmes basée sur la typologie de Gérard Vergnaud ;
- des stratégies de résolution efficaces en étudiant la structure profonde des problèmes.

Les étapes et stratégies essentielles pour enseigner la résolution de problèmes :

1) Lecture et compréhension
2) Reconnaître la structure du problème.
3) Compléter la structure : mettre en équation.
4) Résoudre cette équation.
5) Exprimer le résultat, la réponse.
6) Expliciter sa démarche.

Pour aller plus loin sur ces étapes et stratégies : ici

Liens utiles :

- Sommaire : http://centre-alain-savary.ens-lyon.fr/CAS/documents/doc-maths-argenteuil/sommaire-document-kevin
- Le fichier 1 : http://centre-alain-savary.ens-lyon.fr/CAS/documents/doc-maths-argenteuil/fichier-niveau-1-edition-2-2017-2018-version-3
- Le fichier 2 : http://centre-alain-savary.ens-lyon.fr/CAS/documents/doc-maths-argenteuil/fichier-niveau-2-edition-4-2017-2018

- Le fichier 3 : http://centre-alain-savary.ens-lyon.fr/CAS/documents/doc-maths-argenteuil/fichier-niveau-3-edition-4-2017-2018
- Le fichier 4 : http://centre-alain-savary.ens-lyon.fr/CAS/documents/doc-maths-argenteuil/fichier-niveau-4-edition-4-2017-2018
- Le fichier 5 : http://centre-alain-savary.ens-lyon.fr/CAS/documents/doc-maths-argenteuil/fichier-niveau-5-edition-2-version-2017-2018
- L'analyse de l'IFE sur ces fichiers : http://centre-alain-savary.ens-lyon.fr/CAS/mathematiques-en-education-prioritaire/reportage-argenteuil/des-situations-mathematiques

Banque d'énoncés de problèmes arithmétiques et son outil de recherche multi-critères

L'Académie de Poitiers propose un outil permettant de trouver des problèmes en lien avec la typologie de Gérard Vergnaud. A chaque énoncé de problème sont attachés des mots-clés. Les principaux mots-clés font référence à la cette typologie. C'est pourquoi la connaissance de cette typologie est un préalable à toute recherche multi-critères sur ce site.

Les cri

http://alecole.ac-poitiers.fr/enonces/

Affiner la recherche :

Champ opératoire

Catégorie

Recherche

Domaine numérique

Difficulté

Données

Thématique

Lancer la recherche